# ZGOMOTE SI PERTURBATII

# Cap.1
# Notiuni fundamentale

# Studiul fluctuatiilor folosind teoria de semnal

Aceasta metoda are un character mai fizic si este preferata de toti cei ce sunt interesati de aspectul masurare, caz in care fluctuatiile sunt identificate cu semnale aleatorii.

# Semnale

- Semnale periodice

$$v(t) = v(t+T) \qquad (1.1)$$

- Semnale aperiodice

Semnalul reprezinta materializarea propagarii energiei intr-un circuit.
Exista doua familii de semnale:

1) *Semnale periodice* , caracterizate printr-o forma de unda care se repeat dupa un interval fix, numit *perioada* si notat cu T, Eq.(1.1).
2) *Semnale aperiodice*, caracterizate prin faptul ca Eq.(1.1) nu este satisfacuta pentru nici o valoare a lui T. Este cazul semnalelor de tip "vocal", semnalelor tranzitorii si semnalelor aleatorii.

Noi suntem interesati in acest curs mai ales de semnalele aleatorii, care sunt caracterizate de o incertitudine totala a evolutiei lor. Exemple de semnale aleatorii sunt: perturbatiile cosmice, atmosferice sau parazitii produsi de activitatea industrial. Pentru a caracteriza un semnal in domeniul timp, facem apel la urmatorii parametric: 1) valoarea medie, 2) valoarea medie patratica, 3) Factorul de forma, 4) factorul de creasta.

# Valoarea medie

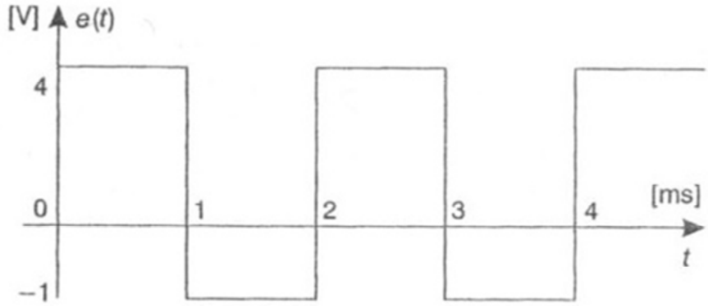


Fig.1.1

$$I_0 = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt \qquad (1.2)$$

Definitie

Valoarea medie este raportul dintre aria definite sub forma de unda in timpul unei perioade si valoarea acestei perioade.

Pentru un semnal i(t), valoarea medie $I_0$ este data de Eq.(1.2), unde T este timpul de observare.

Daca semnalul nu este periodic, Eq.(1.2) se aplica identificind perioada T cu intervalul de observare (de droit cit mai mare posibil).

# Exemplu

$$E_0 = \frac{1}{(2ms)}\left((4V)(1ms) + (-1V)(1ms)\right) = 1.5V$$

In cazul semnalului din Fig.1.1, putem calcula valoarea medie conform definitiei.

# Valoarea medie patratica

## Valoarea eficace

$$\underbrace{\frac{1}{R}\frac{1}{T}V^2\int_0^T \cos^2 \omega t dt}_{\text{Puterea semnalului}} = \underbrace{\frac{1}{R}V_{CC}^2}_{\text{Puterea in CC}} \qquad (1.3)$$

$$V_{ef} = V_{CC} = V/\sqrt{2} \qquad (1.4)$$

## Valoarea medie patratica

$$V_{qm} = \left(V_{ef}\right)^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v^2\left(t\right)dt \qquad (1.5)$$

Consideram un semnal periodic v(t) = V cos(ωt). Valoarea eficace este notata cu $V_{ef}$, iar valoarea sa medie patratica cu $V_{qm}$ .

- Valoarea eficace

Aceasta este o marime masurabila, care, traditional, este introdusa cu ajutorul puterii disipate intr-o rezistenta de sarcina.
*Prin definitie, valoarea eficace a unui semnal este egala cu valoarea curentului continuu care ar disipa , in aceeasi sarcina, aceeasi putere ca semnalul studiat.*
Astfel, pentru semnalul armonic v(t) considerat mai sus, putem scrie Eq.(1.3), de unde Eq.(1.4).
In concluzie, valoarea eficace a unui semnal ne da posibilitatea de a calcula puterea pe care acesta o disipa intr-o sarcina, fara a ne interesa forma de unda a semnalului.

- Valoarea medie patratica

Prin definitie, valoarea medie patratica este egala cu patratul valorii eficace. Eq.(1.5)

# Calculul valorii medii patratice

- Ridicati la patrat semnalul original
- Calculati aria cuprinsa sub aceasta curba pentru o perioada
- Impartiti aria la perioada

# Exemplu

$$E_{qm} = \frac{(4V)^2 (1ms) + (-1V)^2 (1ms)}{(2ms)} = 8.5\, V^2$$

$$E_{ef} = \sqrt{8.5} = 2.91\, V$$

$$P = E_{qm} / R \qquad (1.6)$$

Pentru forma de unda din Fig.(1.1), valoarea medie patratica se calculeaza ca in exemplu. Valoarea eficace este radacina patrata din valoarea medie patratica. Putem concluziona ca o tensiune continua de 2.91V disipa intr-o rezistenta R aceeasi cantitate de caldura ca si semnalul din Fig.(1.1).

Cu ajutorul relatiei (1.5) avem relatia (1.6).
Eq.(1.6) ofera posibilitatea de a privy valoarea medie patratica ca fiind puterea disipata de semnal intr-o sarcinade 1Ω. Aceasta putere se numeste *putere normalizata*.

In cazul zgomotului, valoarea medie patratica este primul parametru semnificativ, deoarece valoarea medie a zgomotului este nula.

# Corelatia

$$v_a = A\sin(\omega t) \qquad (1.7a)$$
$$v_b = B\sin(\omega t+\phi) \quad (1.7b)$$
$$v_b = \underbrace{(B\cos\phi)\sin(\omega t)}_{\text{termenul 1}} + \underbrace{(B\sin\phi)\cos(\omega t)}_{\text{termenul 2}} \quad (1.7c)$$

<u>Definitie</u>
Doua forme de unda sunt coerente daca evolutia lor temporala este similara, cu exceptia amplitudinilor care se pot deosebi printr-un factor de scara.

Doua semnale coerente se numesc <u>*total correlate*</u>. In acest caz:
1) Functiile care descriu evolutia lor in timp sunt identice;
2) Defazajul intre cele doua forme de unda este nul;
3) Amplitudinile lor nu sunt in mod necesar egale.

Daca defazajul nu este nul, dar ramine sufficient de slab, atunci semnalele sunt <u>*partial correlate*</u>. In acest caz, pericolul care trebuie evitat este de a avea un defazaj prea important, care ar putea modifica radical comportamentul. De exemplu, un defazaj de π/2 impus unei sinusoide, o transforma in cosinusoida.

Exemplu
Sa consideram cazul elementar a doua semnale sinusoidale, de aceeasi frecventa, dar de amplitudini diferite, defazate cu un unghi slab ø (deci semnale partial correlate), Eqs.(1.7).
Dezvoltind, semnalul vb se poate pune sub forma echivalenta (1.7c).
Termenul 1 reprezinta un semnal total corelat cu va (aceeasi functie, fara defazaj), in

timp ce termenul 2 este decorelat in raport cu va (alta functie de timp). In functie de valoarea lui ø, amplitudinile acestor componente se pot modifica, chiar anula.

Acest exemplu introduce o tehnica des folosita in teoria zgomotului: cind avem doua generatoare de zgomot na si nb partial correlate, na poate fi descompus in doua generatoare na1 si na2, astfel incit na1 sa fie complet corelat cu nb, iar na2 independent in raport cu nb (aceeasi descompunere se poate aplica semnalului nb).

# Cazul fluctuatiilor

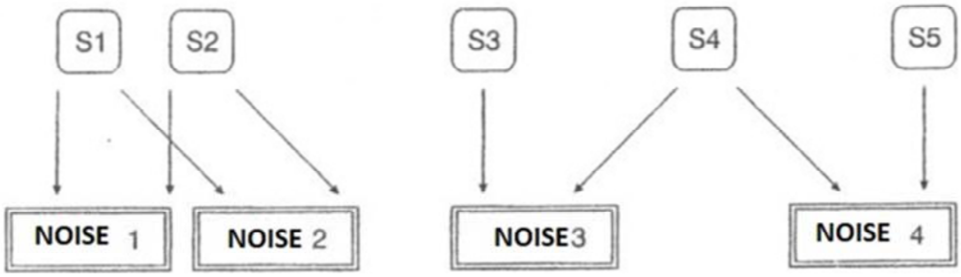


Fig.1.2

Semnalele aleatorii (de zgomot) nu sunt descries prin expresii analitice in raport cu timpul, ci in termini probabilistici. Singura “legatura” intre evolutia a doua fluctuatii este posibila doar datorita unor eventuale origini comune.
De exemplu, daca un semnal de zgomot este produs de un anumit fenomen fizic, care este cel putin partial responsabil de generarea unui al doilea semnal de zgomot, este evident ca cele doua semnale de zgomot nu pot evolua independent unul de altul si sunt, deci, *partial correlate*. Toate situatiile posibile sunt illustrate in Fig.1.2., unde sursele sunt notate S1, S2, S3, S4 si S5. Aceste surse simbolizeaza fie fenomene fizice care sunt la originea zgomotului, fie generatoare echivalente introduce in scopul modelarii.
Semnalele de zgomot 1 si 2 sunt total correlate, 3 si 4 sunt partial correlate, dar 1 si 3 (sau 2 si 4, sau 1 si 4, sau 2 si 3) sunt independente.

# Coeficientul de corelatie (aproximarea clasica)

$$\overline{v^2} = \overline{\left(v_a + v_b\right)^2} = \overline{v_a^2} + 2\overline{v_a v_b} + \overline{v_b^2} \qquad (1.8a)$$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \left( A^2 \sin^2 \omega t + 2AB \sin(\omega t)\sin(\omega t + \phi) + B^2 \sin^2(\omega t + \phi)\right) dt \qquad (1.8b)$$

$$\overline{v^2} = \frac{A^2}{2} + AB\cos\phi + \frac{B^2}{2} \qquad (1.8c)$$

Ne este necesara o masura pentru a aprecia corelatia care exista intre doua semnale. Reluam cazul celor doua semnale deterministe (1.7a) si (1.7b) si presupunem ca ele sunt aplicate simultan la bornele unei rezistenta unitare. Suntem interesati de puterea disipata in aceasta rezistenta.

Asa cum am vazut, avem nevoie de valoarea patratica medie a tensiunii totale la bornele sarcinii, Eq.(1.8a). Dezvoltarea este posibila deoarece valoarea medie a sumei este suma valorilor medii. Pentru produs, valoarea sa medie este egala cu produsul valorilor medie daca si numai daca semnalele sunt independente. Substituind relatiile (1.7a) si (1.7b) in Eq.(1.8a) , avem (1.8b). Dupa calcule, ajungem la (1.8c)

# Coeficientul de corelatie (aproximarea clasica)

$$\overline{v^2} = v_{ef}^2 = \left( \frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}} \right)^2 \qquad (1.8d)$$

$$\overline{v^2} = \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2} \qquad (1.8e)$$

$$c = \frac{\overline{v_a v_b}}{\sqrt{\overline{v_a^2}\,\overline{v_b^2}}} \quad (1.9) \qquad c = \frac{\overline{v_a v_b}}{(v_a)_{ef}(v_b)_{ef}} = \frac{AB\cos\phi}{AB} = \cos\phi \quad (1.10)$$

Avem urmatoarele cazuri particulare:

1) Daca ø = 0, cele doua forme de unda sunt total correlate. Eq.(1.8c) devine (1.8d), ceea ce dovedeste ca pentru doua semnale total correlate, valoarea eficace a tensiunii totale este suma valorilor eficace a celor doua semnale.
2) Consideram cazul ø = π / 2, care corespunde la doua semnale independente. In acest caz, puterea normalizata disipata in sarcina este suma puterilor normalizate individuale, Eq.(1.8e).
3) Daca 0 < ø <π/2, suntem in situatia intermediara, adica corelatie partial. Coeficientul de corelatie este definit prin expresia (1.9), ceea ce conduce la Eq.(1.10).

Egalitatea (1.10) dovedeste ca valoarea apsoluta a coeficientului de corelatie este cuprinsa intre 0 (cazul semnalelor independente) si 1 (cazul semnalelor total corelate). Valoarea posibila -1 indica o corelatie totala intre doua semnale a caror forme de unda sunt in opozitie de faza si se scad una din alta.

# Studiul fluctuatiilor folosind teoria probabilitatilor

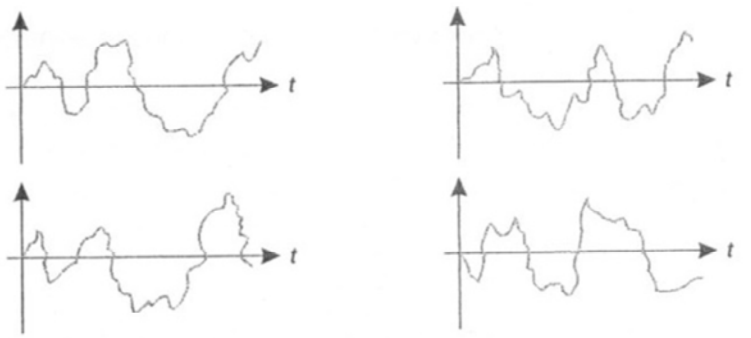


**Fig.1.3**

Orice marime fizica prezinta fluctuatii in jurul valorii sale medii de echilibru, care pot fi considerate ca un process aleatory. In cazul celor mai multe fenomene fizice, admitem ca valorile instantanee ale fluctuatiilor sunt distribuite intr-o maniera Gausiana in jurul mediei si in multe dintre cazuri avem si argumente puternice (bazate pe teorema limitei centrale) in favoarea acestei ipoteze.

Variabila aleatoare

In circuitele electronice, fluctuatiile tensiunilor si curentilor sunt descries utilizind conceptul de variabila aleatoare. Prin *definitie,o variabila aleatoare este o corespondenta care permite sa atribuim valori numerice rezultatelor unei experiente statistice (incercare)*. Trebuie sa observam ca notiunea de variabila aleatoare este o denumire inselatoare, deoarece nu este vorba de o variabila in sensul classic al termenului, ci mai mult de o functie aleatoare.

O variabila aleatoare poate fi continua (daca valorile pe care le ea apartin unui interval continuu) sau discrete (cind avem in vedere doar citeva valori bine definite). De exemplu, in incercarea de aruncare a unei monede, putem atribui valoarea +1 la aparitia unei fete si valoarea -1 cind apare cealalta fata. In acest caz variabila aleatoare este discrete si ia doar doua valori. Asemanator, fluctuatia numarului total de purtatori de sarcina intr-un semiconductor conduce la a considera o variabila

aleatoare discrete avind un numar imens de valori.
Daca incercarea considerate consta in a arunca o sageata la tinta, putem define ca variabila aleatoare distanta dintre punctul ei de impact si centrul tintei. De aceasta data, variabila poate lua oricare valoare si suntem deci in prezenta unei variabile aleatoare continue. Astfel, daca singura propietate retinuta pentru a caracteriza un current de zgomot este valoarea instantanee a amplitudinii sale,, aceasta ne conduce a considera o variabila aleatoare continua.

Proce aleatoriu (stochastic)
In cazul unui process aleatoriu rezultatul incercarii nu este un numar, ci o functie aleatoare de timp. Totalitatea tuturor functiilor aleatoare rezultind dintr-o serie de incercari se numeste multime.
De exemplu, zgomotul termic al unei rezistente constituie un process aleatory.
Evolutia tensiunii de zgomot a acestei rezistente defineste o variabila aleatoare (esantion) si totalitatea tensiunilor de zgomot generate de catre multe rezistente similar constituie multimea, Fig. 1.3.

# Studiul fluctuatiilor folosind teoria probabilitatilor

- **Densitate de probabilitate**

$$f(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{(\text{Numarul de valori in intervalul } \Delta\text{x situat la x}) \cdot \Delta x}{\text{Numarul total N de valori}}$$

- **Fuctia de repartitie**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \qquad (1.11)$$

Densitate de probabilitate
In cazul zgomotului, putem adopta ca marime fluctuanta curentul (sau tensiunea) de zgomot. Consideram o situatie ideala, cind avem posibilitatea de a masura la orice moment aceasta marime si fie x o valoare a amplitudinii sale pe care o vom reprezenta pe axa abciselor. Daca divizam aceasta axa in interval elementare Δx si numaram numarul de valori masurate care apartin fiecarui interval, putem aproxima densitatea de probabilitate f9x0 prin expresia de pe slide.
Atunci probabilitatea de a avea amplitudinea curentului (sau a tensiunii) de zgomot in interiorul intervalului elementar dx centrat in jurul lui x va fi egala cu f(x)dx.

Functia de repartitie
Ea este definite ca probabilitatea cu care amplitudinea masurata este inferioara unei valori date x. Ea se calculeaza cu Eq.(1.11).

## Caracterizarea marimilor fluctuante

- Ergodism
- Stationaritate
- Medii

$$m_n(x) = \overline{x^n(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx \quad (1.12)$$

$$m_2(x-\overline{x}) = \mathrm{var}.\{x\} = \overline{(x-\overline{x})^2} = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \quad (1.13)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{var}.(x)} \quad (1.14)$$

O propietatea importanta a tuturor fluctuatiilor este imposibilitatea de a specifica amplitudinea sa la fiecare moment de timp; din acest motiv , suntem fortati sa adoptam o descriere statistica.

In general, o marime fluctuanta este carecterizata complet prin densitatea sa de probabilitate (sau functia sa de repartitie). In cazul zgomotului electric, acest fapt este rareori posibil si trebuie sa adoptam o descriere incomplete, cu ajutorul mediilor.

Exista doua posibilitati de a calcula mediile amplitudinii unui current(sau ale unei tesnsiuni) de zgomot. Prima abordare se bazeaza pe revelarea valorilor instantanee ale acestui current, pe o perioada lunga de timp, urmata de calculul mediei. Obtinem astfel *media temporala* a curentului i(t), care va fi notate $\bar{i}$ . Acesta este cazul intilnit in masuratorile de zgomot.
A doua abordare consta in a considera un ansamblu fictive de foarte multe sisteme identice, toate livrind acelasi current de zgomot i(t). Daca ne situam in cazul ideal in care putem observa simultan toate valorile instantanee la un moment dat de timp $t_0$ , atunci va fi posibil sa calculam media lor $\langle i \rangle$ , care se numeste *medie statistica.* Acest mod de a estima mediile este utilizat mai ales in calculul de zgomot.

Ergodism

Un process aleatory este numit ergodic daca media temporala este egala cu media statistica. Zgomotul electric este un process ergodic.

Stationaritate

Un process este stationar daca toate mediile sunt independente de timp. Cele mai importante tipuri de zgomote pot fi descries prin procese stationare. De remarcat ca, orice process ergodic este si stationar, dar reciproca nu este valabila.

Medii

Formula de calcul a mediei de ordinal n, a unei variavile aleatoare x presupusa continua, avind densitatea de probabilitate f(x), este Eq.(1.12).

Valorile Medii cele mai importante care caracterizeaza o fluctuatie x(t) sunt media de primul ordin si cea de al doilea ordin (care este valoarea patratica medie). In cazul unui current de zgomot, valoarea medie este intotdeauna zero, prima medie nenula fiind $\overline{i^2}$ .

Daca valoarea medie nu este nula, se introduce variabila centrata $(x - \overline{x})$ , a carei medie de ordinal doi se numeste *varianta*, Eq.(1.13). Se foloseste si marimea (1.14) numita *deviatie standard*

## Sensul fizic asociat diverselor val. medii

1. Media de ordinal intii reprezinta component de current continuu.
2. Matratul mediei de ordinal intii poate fi identificat cu puterea de current continuu dezvoltata intr-o rezistenta de 1Ω.
3. Media de ordinal doi reprezinta puterea totala disipata intr-o rezistenta de 1Ω.
4. Varianta este puterea componentei de semnal disipata in rezistenta de 1Ω.
5. Deviatia standard reprezinta valoarea efectiva a componentei de semnal a curentului.

Daca x(t) reprezinta un current sau o tensiune , atunci in cazul unui process ergodic putem interpreta mediile de primul si al doilea ordin in felul urmator:

1) Media de ordinal intii reprezinta component de current continuu.
2) Patratul mediei de ordinal intii poate fi identificat cu puterea de current continuu dezvoltata intr-o rezistenta de 1Ω.
3) Media de ordinal doi reprezinta puterea totala disipata intr-o rezistenta de 1Ω.
4) Varianta este puterea componentei de semnal disipata in rezistenta de 1Ω.
5) Deviatia standard reprezinta valoarea efectiva a componentei de semnal a curentului.

# Teorema limitei centrale

$$Y = \sum_{i}^{n} X_i$$

$$Y \xrightarrow{n \to \infty} \text{Variabila normala}$$

$$\langle Y \rangle = n \langle X_i \rangle \text{ , var.}(Y) = n\sigma^2$$

Variabila normala $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{\left(x - \bar{x}\right)^2}{2\sigma^2} \right\}$

Notam cu $X_1$ , $X_2$ , …, $X_n$ , variabile aleatoare avind aceeasi densitate de probabilitate (si prin urmare aceeasi valoare medie si aceeasi variant). Daca n tinde la infinit, suma variabilelor aleatoare tinde la o lege normal.

# Caracterizarea folosind doua variabile

- Densitatea de probabilitate f(x,y)
- Functia de repartitie F(x,y)

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \quad (1.15)$$

Inconvienentul descrierii unidimensionale consta in imposibilitatea de a accede la spectrul de putere al fluctuatiei studiate. Caracterizarea cu ajutorul unei singure variabile aleatoare permite doar separarea componentei continue de restul semnalului, cu ajutorul mediilor de ordinul 1 si 2.
Etapa urmatoare consta in a lua in considerare statistica cuplului de valori ale curentului(sau tensiunii) , separate prin intervale de timp bine definite. Astfel ajungem sa consideram doua variabile aleatoare.

<u>Densitatea de probabilitate f(x,y)</u>
f(x,y) este functia care, multiplicata cu aria elementara dxdy, ne da probabilitatea de a avea simultan prima variabila cuprinsa intre x si x+dx si a doua intre y si y+dy.

<u>Functia de repartitie F(x,y)</u>
Ea se defineste ca fiind probabilitatea de a avea variabilele inferioare la doua valori x si y prestabilite, Eq.(1.15).

# Caracterizarea folosind doua variabile

- Medii

$$m_{ik}(x,y) = \overline{x^i y^k} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^i y^k f(x,y)dxdy \quad (1.16)$$

$$m_{00}(x,y) = 1 \quad (1.17a)$$

$$m_{01} = \overline{y} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy \quad (1.17b)$$

$$m_{10} = \overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy \quad (1.17c)$$

In cazul zgomotului electric, $\overline{x} = \overline{y}$ = 0 si primele medii semnificative ramin $\overline{x^2}$ , $\overline{y^2}$ si $\overline{xy}$ .

# Caracterizarea folosind doua variabile

- Variabile centrate

$$\mu_{ik}(x,y) = \overline{\left(x-\overline{x}\right)^i \left(y-\overline{y}\right)^k} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\overline{x}\right)^i \left(y-\overline{y}\right)^k f(x,y)\,dxdy \quad (1.18)$$

$$\mu_{02} = \overline{\left(y-\overline{y}\right)^2}$$

$$\mu_{20} = \overline{\left(x-\overline{x}\right)^2}$$

## Covarianta

$$\mu_{11} = \overline{\left(x-\overline{x}\right)\left(y-\overline{y}\right)} = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} \quad (1.19)$$

In cazul in care cele doua marimi fluctuante x si y sunt independente, (adica o valoare luata de x nu influenteaza valorile luate de y), atunci covarianta este nula si media produsului  este egala cu produsul mediilor.

Covarianta permite definirea spectrului de putere (densitatea spectrala) a unui process aleatory.

# Corelatia

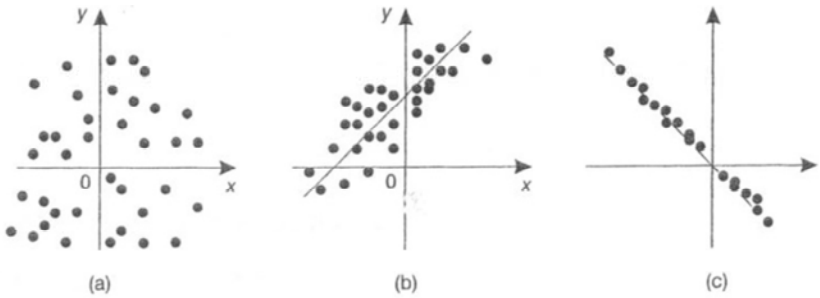


**Fig.1.4**

$$c = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.20) \qquad -1 \le c \le +1$$

Corelatia este relatia existent intre doua cantitati fluctuante x si y, care au tendinta de a se influenta mutual, intr-o maniera care nu poate fi unic explicata prin teoria hazardului.

O metoda intuitive de a observa daca cantitatile x si y sunt sau nu correlate este aceea de a reprezenta intr-un plan toate perechile de valori (x,y) obtinute, Fig.1.4.
Daca cele doua cantitati nu sunt correlate, ne putem astepta ca aceste puncta sa fie uniform repartizate in tot planul, Fig.1.4a.
Daca cele doua cantitati depend una de alta, atunci punctele sunt distribuite in jurul curbei care descrie dependent lor functionala, Fig.1.4b.
Corelatia totala este ilustrata in Fig.1.4c.

Coeficientul de corelatie
Prin definitie, coeficientul de corelatie intre doua cantitati fluctuante x si y este raportul dintre covarianta lor si produsul deviatiilor standard ale lor, Eq.(1.20).
In functie de valorile coeficientului de corelatie, putem stabili urmatoarea clasificare:

1) Daca c = 0, atunci x si y sunt independente
2) Daca c = 1, atunci x si y sunt total correlate (dependent liniara intre x si y)
3) Daca $|c| \le 1$ , atunci cantitatile x si y sunt partial correlate.

Excemtind cazul circuitelor neliniare, corelatia intre marimile de zgomot este intotdeauna liniara

# Corelatia partiala

$$y = ax + z, \quad a = \text{ct.} \quad (1.21a)$$

unde

$$\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} \quad (1.21b)$$

$$c = (sign\ a)\left(1 + \overline{x^2}/\overline{a^2 x^2}\right)^{-1/2} \quad (1.22)$$

In cazul a doua cantitati fluctuante x si y partial correlate, avem posibilitatea de a exprima pe y sub forma unei sume din doi termini, primul fiind total corelat cu x si al doilea (z) fiind independent, Eq.1.21a.
Aceasta descompunere este arbitrara si nu este unica, prin urmare nu I se poate atribui nici un sens fizic.

# Functia de autocorelatie

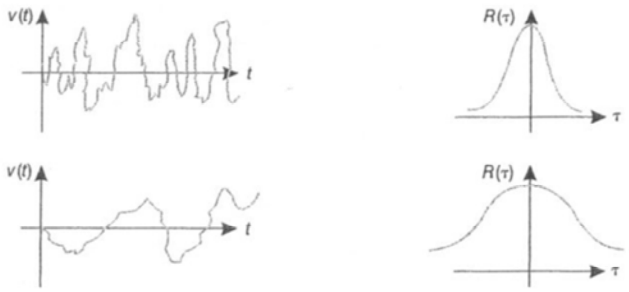


**Fig.1.5**

$$R(\tau)=\overline{v(t_1)v(t_1+\tau)} \quad (1.23)$$

$$R(0)=\overline{v^2} \quad (1.24)$$

Adesea este important sa stim cit de repede se modifica o functie aleatoare. In raport cu timpul. Aceasta informative este furnizata de functia de autocorelatie.
Fie cazul cind facem doua masuratori asupra aceleasi surse de zgomot, la doua momente de timp diferite: x = v(t1) si y = v(t1+τ).
Daca zgomotul v(t) este stationar, atunci statistica nu depinde de momentul t1, ci doar de τ.

*Prin definitie, <u>functia de autocorelatie</u> este media produsului v(t1) si v(t1+τ), Eq.(1.23).*
Conform Fig. 1.5, largimea functiei de autocorelatie este invers proportional cu viteza de variatie a functiei aleatoare.

R(τ) reprezinta o masura a corelatiei care exista intre doua valori de cantitatea fluctuanta v(t) , la doua momente diferite de timp. Observam ca, daca in Eq.(1.23) , v(t) este un semnal periodic, atunci cunoasterea semnalului la momentul t este suficienta pentru a prevedea evolutia sa la momentul (t+τ); spunem ca semnalele periodice sunt total correlate cu ele insele. Dimpotriva, daca v(t) este o cantitate fluctuanta, corelatia este foarte slaa, caci cunoasterea semnalului la momentul t1, furnizeaza putine informatii asupra evolutiei sale immediate.

Trebuie observant ca daca τ = 0, atunci functia de autocorelatie se identifica cu valoarea patratica medie, Eq.(1.24) si avind in vedere sensul fizic al mediilor, *functia de autocorelatie este deci egala cu puterea totala dezvoltata de v(t) intr-o sarcina unitara.*

*In concluzie, functia de autocorelatie si puterea semnalului sunt legate.*

# Spectre de energie si de putere

- **Transformata Fourier**

$$F(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt \quad (1.25a)$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(f)\exp(j2\pi ft)\,df \quad (1.25b)$$

Reprezentarea in domeniul frecventa a functiei de timp f(t) se obtine cu ajutorul transformatei Fourier, Eq.(1.25a), iar transformata Fourier inversa este in (1.25b).

# Spectrul unui semnal aperiodic

$$S_f(V) = \frac{V_{ef}^2}{\Delta f} = \left( \frac{V_{ef}}{\sqrt{\Delta f}} \right)^2 \quad (1.26)$$

- Densitate spectrala
- Putere normalizata

In cazul unui semnal aperiodic, spectrul de amplitudine F(f) , precum si cel de faza <F(f), sunt ambele continue.

Densitate spectrala
Densitatea spectrala de putere este definite ca fiind o functie reala $S_f$ , para si pozitiva, care descrie distributia puterii medii in functie de frecventa.
Integrata pe tot domeniul frecventa, ea conduce la puterea medie totala normalizata (per ohm).

Astfel, pentru o sarcina unitara si un semnal v(t) de valoare eficace Vef (presupusa constanta in banda Δf), putem scrie Eq.(1.26).

Cantitatea $V_{ef}/\sqrt{\Delta f}$ este numita densitate spectrala a tensiunii; ea este masurata in $V/\sqrt{Hz}$ . Putem introduce si densitatea spectrala curentului, masurata in $A/\sqrt{Hz}$ .

Putere normalizata
Produsul $S_f$ (x) df reprezinta puterea medie disipata de semnalul x(t) intr-o rezistenta de 1 Ω, intr-un interval de frecvente df.

# Teorema lui Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\,x_2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1^*(f)\,X_2(f)\,df \quad (1.27)$$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v^2(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\,F^*(j\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(j\omega)\right|^2 d\omega \quad (1.28)$$

Aceasta teorema stabileste trecerea intre domeniul temporal si domeniul frecvential pentru produsul a doua functii reale, Eq.(1.27).

Folosind proprietatea de simetrie si luind in considerare un singur semnal, aceasta teorema se poate exprima in termini de energie a semnalului, Eq.(1.28).

Aceasta egalitate , (1.28), dovedeste ca energia totala a unui semnal poate fi calculate in doua moduri diferite: 1) integrind cantitatea $|F(j\omega)|^2$ pe tot spectrul; 2) integrind valoarea patratica medie pe tot domeniul temporal. In acest fel se stabileste o echivalenta intre spectrul de frecventa si valoarea patratica medie a semnalului.

# Densitate spectrala de energie

$$S_\omega(W) = \frac{1}{2\pi}\left|F(j\omega)\right|^2 \quad (1.29)$$

Densitatea spectrala de energie represinta felul in care energia semnalului aperiodic este distribuita. Tinind cont de relatia (1.28), ea se introduce prin relatia (1.29).
Prin definitie, densitatea spectrala de energie este o functie reala, pozitiva si para, care integrata pe tot domeniul de pulsatii, conduce la energia medie totala per ohm.
Densitatea spectrala de energie poate fi modificata prin trecerea semnalului printr-un cuadripol.

# Analiza armonica a marimilor fluctuante

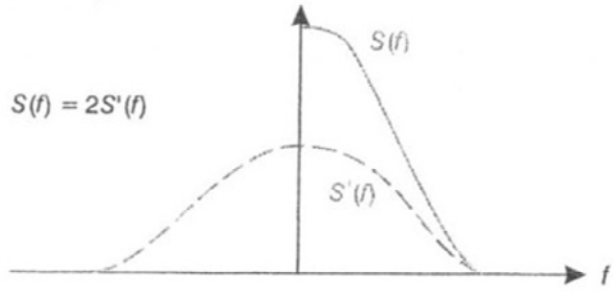


**Fig.1.6**

O marime fluctuanta x(t) este mai mult asimilabila cu un semnal aperiodic, ceea ce face ca sa adoptam apriori definitiile (1.26) si (1.28).
In teoria semnalelor, puterile sunt definite pe un domeniu variind de la $-\infty$ la $+\infty$ (spectru "bilateral"), in timp ce in teoria zgomotului se adopta un spectru unilateral (de la 0 la $+\infty$).
Relatia dintre densitatea spectrala bilaterala (notate S') si densitatea spectrala unilaterala (notate S) este ilustrata in Fig.1.6.

# Teorema Wiener - Khintchine

$$S_f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\exp(-j\omega\tau)\,d\tau \quad (1.30)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_f \exp(+j\omega\tau)\,df \quad (1.31)$$

Fie o fluctuatie x(t) pentru care functia de autocorelatie R(τ) exista.; atunci densitatea spectrala de putere $S_f$ a fluctuatiei x(t) este transformata Fourier a functiei de autocorelatie R(τ),, Eq.(1.30), Eq.(1.31)

# Superpozitia mai multor fluctuatii

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

$$\overline{z^2(t)} = \overline{\left(x(t) + y(t)\right)^2} = \overline{x^2(t)} + 2\overline{x(t)\,y(t)} + \overline{y^2(t)}$$

$$\overline{z^2(t)} = P_1 + 2P_{12} + P_2 \quad (1.32)$$

Dorim sa calculam puterea obtinuta prin suprapunerea a doua fluctuatii x(t) si y(t), astfel incit z(t) = x(t) + y(t).
P1 si P2 reprezinta puterile proprii ale fluctuatiilor si P12 este *puterea incrucisata.*
Daca fluctuatiile nu sunt correlate (cind ele provin din doua surse de zgomot independente), atunci P12 = 0 si in acest caz rezulta ca puterile ( si asemenea densitatile spectrale si functiile de autocorelatie) au propietatea de aditivitate.

# Functia de intercorelatie
# Densitate spectrala de putere incrucisata

$$S_f(xy) = F\{R_{xy}(\tau)\} \quad (1.33)$$

Functia de intercorelatie este definite ca media temporala a produsului $x(t)y(t+\tau)$ si este notata $R_{xy}(\tau)$. Doua procese aleatoare pentru care $R_{xy}(\tau) = 0$, oricare ar fi $\tau$, sunt *ortogonale.* D exemplu, daca doua procese sunt independente din punct de vedere statistic si daca cel putin una din ele are o valoare medie nula, atunci ele sunt ortogonale (dar reciproca nu este adevarata)

Densitate spectrala de putere incrucisata (Eq.1.33)

# Cazul sistemelor liniare

$$S_f(y) = H(j2\pi f)H^*(j2\pi f)S_f(x) = \left|H(j2\pi f)\right|^2 S_f(x) \quad (1.34)$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{S_f(y)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|H(j2\pi f)\right|^2 S_f(x)\exp(j2\pi/\tau)\,df \quad (1.35)$$

$$R_{xy}(\tau) = h(\tau) \circ R_x(\tau) \quad (1.36)$$

$$S_f(xy) = H(j2\pi f)S_f(x) \quad (1.37)$$

$$S_f(yx) = S_f^*(xy) \quad (1.38)$$

Fie un sistem linear cu parametric concentrati, caracterizat prin functia de transfer H(jω), care este excitat de catre o fluctuatie x(t) despre care cunoastem media si densitatea spectrala $S_f$ (x). In acest caz, densitatea spectrala de putere a fluctuatiei y(t) la iesire este Eq.(1.34)
Functia de autocorelatie la iesire va fi transformata Fourier inversa a lui $S_f$ (y), Eq.(1.35)

1) Se demonstreaza ca functia de intercorelatie intre intrarea x si iesirea y este identica cu produsul de convolutie dintre functia de autocorelatie a intrarii si raspunsul sistemului la impuls., Eq.(1.36).
2) Densitatea spectrala de putere incrucisata este un numar complex, calculate cu relatia (1.37).
3) Din cele de mai sus, avem propietatea (1.38).

# Concluzie

Exceptind fenomenele tranzitorii, teoria clasica a circuitelor ramine valabila si pentru fluctuatii. Atit timp cit scopul cautat Este calculul valorilor patratice medii (ale tensiunii sau curentului) si nu calculul tensiunilor (curentilor) circuitului.

# Matricea de corelatie

- **Spectru de puteri proprii si incrucisat**

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

$$|Z|^2 = (X+Y)(X^* + Y^*) = |X|^2 + |Y|^2 + XY^* + X^*Y \quad (1.39)$$

$$S'_f(Z) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{|Z|^2}{\tau} = S'_f(XX) + S'_f(YY) + S'_f(XY) + S'_f(YX) \quad (1.40)$$

$$S'_f(XX) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{X^*X}{\tau} \quad \text{si} \quad S'_f(YY) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{Y^*Y}{\tau} \quad (1.41)$$

$$S'_f(XY) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{X^*Y}{\tau} \quad \text{si} \quad S'_f(YX) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{Y^*X}{\tau} \quad (1.42)$$

Considerind un process aleatoriu z(t) rezultat din suprapunerea a doua procese stationare x(t) si y(t), calculam transformatele Fourier ale acestor fluctuatii (trunchiate in prealabil la t = τ) pe care le notam Z, X si Y.

Spectrul bilateral este definit prin (1.40), unde in Eq. (1.41) avem densitatile spectrale proprii ale lui x(t) si y(t), iar in Eq.(1.42) avem densitatile spectrale incrucisate ale lui x(t) si y(t).

# Matricea de corelatie

- **Propietati**

$$S'_f(Z) = S'_f(XX) + S'_f(YY) + 2\Re\left[S'_f(XY)\right] \quad (1.43a)$$

$$S_f(Z) = S_f(XX) + S_f(YY) + 2\Re\left[S_f(XY)\right] \quad (1.43b)$$

1) Densitatile spectrale proprii sunt cantitati reale
2) Densitatile spectrale incrucisate sunt cantitati complexe
3) Partile reale ale densitatilor incrucisate sunt functii pare, in timp ce partile imaginare sunt functii impare. Prin urmare, Eq.(1.40) devine (1.43a) si cum partea reala este o functie para, aceasta relatie ramine valabila si pentru spectrele unilaterale, (1.43b).

# Teorema Wiener – Khintchine 2

$$S_f(XX) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)x(t+s)}\exp(j\omega s)\,ds \quad (1.44a)$$

$$S_f(YY) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y(t)y(t+s)}\exp(j\omega s)\,ds \quad (1.44b)$$

$$S_f(XY) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)y(t+s)}\exp(j\omega s)\,ds \quad (1.44c)$$

Putem generaliza teorma Wiener-Khintchine sub forma (1.44a-c)

# Matricea de corelatia

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_f(XX) & S_f(XY) \\ S_f(YX) & S_f(YY) \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Zgomotul asociat la doua fluctuatii, partial correlate, poate fi caracterizat prin matricea de corelatie , care este definite cu ajutorul densitatilor spectrale de putere proprii si incrucisate, in functie de frecventa, Eq.(1.45).

Proprietati
1) Im(C11) = Im(C22) = 0
2) C12 = $C21^*$
3) C11 >= 0 si C22 >= 0
4) $det\{C\} = C_{11}C_{22} - |C_{12}|^2 \geq 0$

# Coeficientul de corelatie (aproximatia Kleckner)

$$\Gamma_{\omega}(i,j) = \frac{S_{\omega}(i,j)}{\sqrt{S_{\omega}(i,i)\,S_{\omega}(j,j)}} \quad (1.46)$$

Daca ne interesam de zgomotul unui multipol, a carui n generatoare echivalente de zgomot conectate la porti sunt descries prin matricea densitatilor spectrale, Kleckner propune definitiile urmatoare pentru coeficientii de corelatie (care, in domeniul frecvential, sunt numere complexe), Eq.(1.46).

Proprietati

1) $\Gamma_{-\omega}(i,j) = \Gamma^{*}_{\omega}(i,j) = \Gamma_{\omega}(j,i)$.
2) $\Gamma_{\omega}(i,j) \leq 1$ , la toate frecventele
3) $|\Gamma_{\omega}(i,j)|$ este legat de corelatia totala intre sursele I si j
4) Corelatia "efectiva" (din punctul de vedere al densitatii de putere) este specificata prin $\mathcal{R}\{\Gamma_{\omega}(i,j)\}$. Daca $\mathcal{R}\{\Gamma_{\omega}(i,j)\} = 0$ , interactiunea dintre densitatile spectrale de putere ale surselor I si j este nula.

# Exemplu

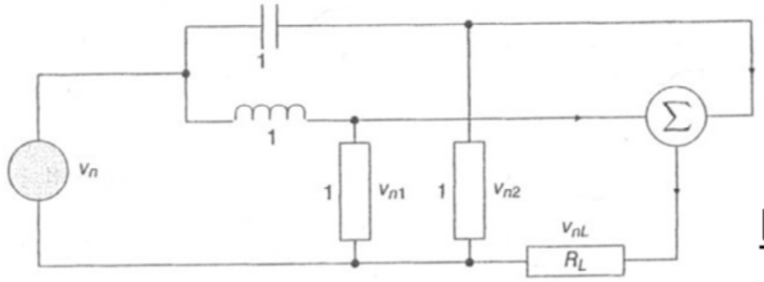


**Fig.1.7**

$$2)\ \Gamma_\omega(1,2) = -j$$

$$v_{n1} = \frac{1}{1+j\omega}v_n \quad \text{deci} \quad |v_{n1}|^2 = \frac{1}{1+\omega^2}v_n^2$$

$$v_{n2} = \frac{1}{1+1/j\omega}v_n \quad \text{deci} \quad |v_{n2}|^2 = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}v_n^2$$

$$v_{n1} = \frac{1}{1+j\omega}v_n \quad \text{deci} \quad |v_{n1}|^2 = \frac{1}{1+\omega^2}v_n^2$$

$$v_{n2} = \frac{1}{1+1/j\omega}v_n \quad \text{deci} \quad |v_{n2}|^2 = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}v_n^2$$

$$S_\omega(1,1) = \overline{v_{n1}v_{n1}^*} = \overline{|v_{n1}|^2} = \frac{\overline{v_n^2}}{1+\omega^2} = \frac{K}{1+\omega^2}$$

$$S_\omega(2,2) = \overline{v_{n2}v_{n2}^*} = \overline{|v_{n2}|^2} = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}\overline{v_n^2} = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}K$$

$$S_\omega(1,2) = \overline{v_{n1}v_{n2}^*} = \overline{\frac{1}{1+j\omega}v_n \frac{1}{1-1/j\omega}v_n} = \frac{-j\omega}{1+\omega^2}K$$

Fie circuitul din figura (1.7)., unde generatorul de zgomot este de tip “zgomot alb”. Densitatea sa spectrala de putere este notate K, valorile componentelor sunt normalizate si sarcina este RL. Se cere:

1) Densitatile spectrale de zgomot la bornele rezistentelor.
2) Coeficientii de corelatie, dupa Kleckner.

Solutia

Interpretarea este urmatoaea: cele doua surse vn1 si vn2 (care sunt total correlate deoarece ele provin din acelasi generator vn) au o interactiune nula intre puterile lor (deoarece partea reala a coeficientului de corelatie $\Gamma_\omega(1,2)$ este nula).